TOUJOURS PARFAIT

$2 \times 3 \times 4 \times 5 + 1 = 11 \times 11$

$21 \times 22 \times 23 \times 24 + 1 = 505 \times 505$

Montrez que si l'on ajoute 1 au produit de quatre nombres consécutifs, la réponse est TOUJOURS un carré parfait.

SOLUTION

Méthode 1

Afin de rendre l'algèbre simple, on choisit $(x - 1)$, x, $(x + 1)$ et $(x + 2)$ pour les 4 nombres consécutifs.

En multipliant les 4 nombres puis en ajoutant 1, on obtient :

$$(x - 1) \times (x + 1)(x + 2) + 1 = x\,(x^2 - 1)\,(x + 2) + 1$$
$$= x^4 + 2x^3 - x^2 - 2x + 1$$

La factorisation de la dernière ligne donne $(x^2 + x - 1)(x^2 + x - 1)$, qui est un carré parfait pour toutes les valeurs de x.

Sinon, en choisissant x, $(x + 1)$, $(x + 2)$ et $(x + 3)$ pour les 4 nombres, $x(x + 1)(x + 2)(x + 3) + 1 = x^4 + 6x^3 + 11x^2 + 6x + 1 = (x^2 + 3x + 1)^2$

Méthode 2

Remarquez que $2 \times 5 = 10$, puis $3 \times 4 = 12$, et $2 \times 3 \times 4 \times 5 = 11 \times 11$.

De même, $21 \times 24 = 504$, puis $22 \times 23 = 506$, et $21 \times 22 \times 23 \times 24 = 505 \times 505$.

On peut faire la conjecture suivante :

$x(x + 1)(x + 2)(x + 3) + 1$

$[x(x + 3) + 1]^2$

$[(x + 1)(x + 2) - 1]^2$

sont tous égaux. La conjecture est facilement prouvée en développant chacune des 3 expressions et en comparant les résultats.

Cela montre que le produit de quatre entiers consécutifs plus un est toujours un carré parfait, et cela donne les facteurs de l'expression quartique sans avoir à effectuer la factorisation.

NOTES POUR LES ENSEIGNANT(E)S

Pourquoi faire cette activité ?

Cette activité fournit une opportunité aux élèves d'expérimenter avec des nombres sur des exemples, puis d'utiliser l'algèbre pour prouver qu'un résultat est vrai en général. Elle demande aux élèves de factoriser une expression quartique en deux termes quadratiques. Comme les élèves savent que les termes quadratiques doivent être identiques, cela rend la factorisation de l'expression quartique plus facile.

Objectifs d'Apprentissage Attendus (Niveaux 10 et 11)

S'entraîner à la multiplication et à la factorisation d'expressions algébriques.

Approche possible

Demandez aux élèves de choisir quatre entiers consécutifs inférieurs à 12, de trouver le produit de ces quatre nombre, et d'ajouter 1 au résultat. Est-ce un carré parfait ? Ecrivez quelques exemples au tableau. Faites un autre exemple avec de plus grands entiers, en utilisant une calculatrice.

Demandez aux élèves d'essayer d'utiliser le calcul algébrique pour prouver que le résultat est toujours un carré parfait, et ce quels que soient les nombres choisis au départ. Vous pouvez suggérer que les 4 entiers consécutifs soient donnés par $(x - 1)$, x, $(x + 1)$ et $(x + 2)$. Mais les élèves peuvent également choisir x, $(x + 1)$, $(x + 2)$ et $(x + 3)$ s'ils ou elles le souhaitent. Ensuite, demandez aux élèves de développer les expression et d'ajouter 1.

Si certain(e)s élèves ont des difficultés à trouver les facteurs de l'expression quartique, rappelez-leur qu'ils ou elles cherchent deux facteurs identiques.

Lorsque la plupart des élèves ont trouvé les facteurs, écrivez les expressions au tableau, et détaillez toutes les étapes du calcul.

Questions clé

Vous devez montrer que cette expression quartique est un carré parfait. Comment comptez-vous procéder ?
Que savez-vous des facteurs quadratiques de l'expression quartique ?
Quels sont les termes constants possibles dans les facteurs ?

Extension possible

Choisissez trois parmi cinq : https://aiminghigh.aimssec.ac.za/grades-8-to-12-take-three-from-five/

Support possible

Différence de carrés : https://aiminghigh.aimssec.ac.za/grades-8-to-10-differences-of-squares/